JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 41, 34-43 (1973)

Estimations dans L^∞ pour une classe de perturbations singulières

JOÃO-PAULO DIAS*

R. Carlos Mardel, 120, 2° D^{to}, Lisboa, Portugal

Submitted by J. L. Lions

1. POSITION DES PROBLÈMES

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ, variété de dimension $N-1$ et de classe C^1, Ω étant localement situé d'un seul côté de Γ. On désignera par $x = (x_1, ..., x_N)$ le point générique de Ω et par D_i la dérivée $\partial/\partial x_i$ au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$, $i = 1,..., N$. Soient p et q tels que

$$2 \leqslant p < +\infty \qquad \text{et} \qquad \max(p, N) < q \leqslant +\infty.$$

On se donne la forme

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |D_i u|^{p-2} D_i u \, D_i v \, dx, \qquad \forall u, v \in W^{1,p}(\Omega),$$

où

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D_i u \in L^p(\Omega), i = 1,..., N\}$$

que l'on munit de sa norme naturelle qui sera notée $\|\cdot\|$ (on ne considère dans ce travail que des fonctions réelles). On se donne aussi $f \in W^{1,q}(\Omega)$ (donc $f \in C(\bar{\Omega})$ puisque $q > N$) et, pour chaque $\epsilon > 0$, $g_\epsilon \in L^{q/(p-1)}(\Omega)$.

On fixe un convexe fermé $\mathbb{K}$ de $W^{1,p}(\Omega)$, dense dans $L^2(\Omega)$, et on désigne, respectivement, par u_ϵ et v_ϵ les solutions uniques des inéquations variationnelles

$$u_\epsilon \in \mathbb{K}, \qquad \epsilon a(u_\epsilon \;\; v - u_\epsilon) + \int_\Omega u_\epsilon(v - u_\epsilon) \geqslant \int_\Omega f(v - u_\epsilon), \qquad \forall v \in \mathbb{K}. \tag{1.1}$$

$$v_\epsilon \in \mathbb{K}, \qquad \epsilon a(v_\epsilon, w - v_\epsilon) + \int_\Omega v_\epsilon(w - v_\epsilon) \geqslant \int_\Omega f(w - v_\epsilon) + \epsilon \left[\int_\Omega g_\epsilon(w - v_\epsilon) + a(f, w - v_\epsilon)\right], \qquad \forall w \in \mathbb{K} \tag{1.2}$$

(pour l'existence et unicité des solutions; cf. [4]).

* Boursier de la Fondation Calouste Gulbenkian.

Remarquons que, avec $\theta_\epsilon = v_\epsilon - f$, (1.2) équivaut à

$$\theta_\epsilon \in \mathbb{K} - f, \qquad \epsilon[a(\theta_\epsilon + f, \varphi - \theta_\epsilon) - a(f, \varphi - \theta_\epsilon)] + \int_\Omega \theta_\epsilon(\varphi - \theta_\epsilon) \geqslant \epsilon \int_\Omega g_\epsilon(\varphi - \theta_\epsilon), \qquad \forall \varphi \in \mathbb{K} - f. \tag{1.3}$$

Rappelons qu'on a

$$c_1(\| u \|_{2,\Omega} + \| \nabla u \|_{p,\Omega}) \leqslant \| u \| \leqslant c_2(\| u \|_{2,\Omega} + \| \nabla u \|_{p,\Omega}), \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \tag{1.4}$$

où

$$\| u \|_{2,\Omega}^2 = \int_\Omega | u |^2, \qquad \| \nabla u \|_{p,\Omega}^p = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N | D_i u |^2 \right)^{p/2},$$

c_1 et c_2 positives et ne dépendant que de N, p et Ω.

$$a(u, u - v) - a(v, u - v) \geqslant c_0 \sum_{i=1}^N \int_\Omega | D_i u - D_i v |^p, \qquad \forall u, v \in W^{1,p}(\Omega), \tag{1.5}$$

$c_0 > 0$ et ne dépendant que de p [6].

Alors, en raisonnant comme dans la démonstration du Théorème 2.1 de [5], et en utilisant (1.4) et (1.5) on démontre que:

$$\| g_\epsilon \|_{p',\Omega} \leqslant c \qquad \text{pour} \qquad \epsilon \leqslant \epsilon_0,$$

où

$$p' = \frac{p}{p-1} \Rightarrow \| w_\epsilon \|_{2,\Omega} \leqslant c_1 \epsilon^{1/2} \qquad \text{pour} \qquad \epsilon \leqslant \epsilon_0, \tag{1.6}$$

où

$$w_\epsilon = u_\epsilon - v_\epsilon = u_\epsilon - \theta_\epsilon - f, \qquad \text{et} \qquad w_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$$

dans $W^{1,p}(\Omega)$ faible.

$$g_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} g_0 \qquad \text{dans} \qquad L^{p'}(\Omega) \Rightarrow w_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0 \tag{1.7}$$

dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Soit

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid \gamma u = 0\},$$

où γ est la trace sur Γ au sens de $W^{1,p}(\Omega)$. On a le théorème suivant:

THÉORÈME 1.1. *Supposons que* $\mathbb{K} + W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{K}$ *et que* u_ϵ *et* v_ϵ *appartiennent à* $L^\infty(\Omega)$, $\forall \epsilon > 0$.[1] *Alors, si*

$$w_\epsilon = u_\epsilon - v_\epsilon = u_\epsilon - \theta_\epsilon - f \qquad et \qquad \theta = \frac{1}{N} - \frac{1}{q},$$

on a

$$\| w_\epsilon \|_{\infty,\Omega} \leqslant \| \gamma w_\epsilon \|_{\infty,\Gamma} + c(\| \nabla f \|_{q,\Omega} + \| g_\epsilon \|_{q/(p-1),\Omega}^{1/(p-1)})^{1/(1+\theta)} \| w_\epsilon \|_{1,\Omega}^{\theta/(1+\theta)} \tag{1.8}$$

où $\| \cdot \|_{\infty,\Omega}$ *désigne la norme dans* $L^\infty(\Omega)$ *et c ne dépend que de* N, p, q *et* Ω.[2]

Compte tenu de (1.6) on a le

COROLLAIRE 1.1. *Sous les hypothèses du Théorème* 1.1 *supposons que* $\| g_\epsilon \|_{q/(p-1),\Omega} \leqslant c_1$ *pour* $\epsilon \leqslant \epsilon_0$. *Alors on a*

$$\| w_\epsilon \|_{\infty,\Omega} \leqslant \| \gamma w_\epsilon \|_{\infty,\Gamma} + c_2 \epsilon^{\frac{1}{2}\theta/(1+\theta)}, \qquad pour \qquad \epsilon \leqslant \epsilon_0. \tag{1.9}$$

EXEMPLE 1.1. Si l'on prend

$$\mathbb{K} = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid h \leqslant \gamma u \leqslant h_1 \text{ p.p. (presque partout) sur } \Gamma\},$$

où h, $h_1 \in W^{1-(1/p),p}(\Gamma)$, $h \leqslant h_1$ p.p. sur Γ et

$$\sup_\Gamma \operatorname{ess} h < +\infty, \qquad \inf_\Gamma \operatorname{ess} h_1 > -\infty,$$

alors on est dans les conditions d'application du Théorème 1.1 (cf. [2]) (on pourrait aussi prendre $h \equiv -\infty$ ou/et $h_1 \equiv +\infty$, cf. [1]).

En particulier, si $h \equiv h_1 \in W^{1-(1/p),p}(\Gamma) \cap L^\infty(\Gamma)$ (problème de Dirichlet) alors $\gamma w_\epsilon = 0$, $\forall \epsilon > 0$.

On se donne maintenant, pour chaque $\epsilon > 0$, un convexe fermé $\mathbb{K}_\epsilon$ de $W^{1,p}(\Omega)$, dense dans $L^2(\Omega)$, et on désigne par φ_ϵ l'unique solution de l'inéquation variationnelle

$$\varphi_\epsilon \in \mathbb{K}_\epsilon, \qquad \epsilon a(\varphi_\epsilon, v - \varphi_\epsilon) + \int_\Omega \varphi_\epsilon (v - \varphi_\epsilon) \geqslant \int_\Omega f(v - \varphi_\epsilon), \qquad \forall v \in \mathbb{K}_\epsilon. \tag{1.10}$$

Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $k \in \overline{\mathbb{R}}_+$ on pose

$$\{u\}^k = \begin{cases} k & \text{si} \quad u \geqslant k \\ u & \text{si} \quad u \leqslant k, \end{cases}$$

$$\{u\}_{-k} = -\{-u\}^k, \qquad \{u\}_{-k}^k = \{\{u\}^k\}_{-k}.$$

[1] Remarquons que $\gamma(W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \subset L^\infty(\Gamma)$.

[2] Remarquons que si $q = +\infty$ alors $\theta/(1+\theta) = 1/(1+N)$.

Ceci étant on a le théorème suivant:

THÉORÈME 1.2. *Supposons que, pour tout* $\epsilon > 0$, *on a* $\varphi_\epsilon \in L^\infty(\Omega)$ *et il existe* $k(\epsilon) \geqslant 0$ *tel que les fonctions*

$$f + \{\varphi_\epsilon - f\}_{-k(\epsilon)}^{k(\epsilon)}, \qquad f + \{\varphi_\epsilon - f\}^k \qquad et \qquad f + \{\varphi_\epsilon - f\}_{-k}$$

appartiennent à $\mathbb{K}_\epsilon$, $\forall k \geqslant k(\epsilon)$.

Alors on a, avec $\psi_\epsilon = \varphi_\epsilon - f$

$$\| \psi_\epsilon \|_{2,\Omega} \leqslant c[k(\epsilon) + \epsilon^{1/2} \| \nabla f \|_{p,\Omega}^{p/2}], \tag{1.11}$$

$$\| \psi_\epsilon \|_{\infty,\Omega} \leqslant k(\epsilon) + c_1 \| \psi_\epsilon \|_{1,\Omega} + c_2 \| \nabla f \|_{q,\Omega}^{1/(1+\theta)} \| \psi_\epsilon \|_{1,\Omega}^{\theta/(1+\theta)} \tag{1.12}$$

où $\theta = 1/N - 1/q$, c, c_1 *et* c_2 *ne dépendant que de* N, p, q *et* Ω.

COROLLAIRE 1.2. *Si* $k(\epsilon) \rightarrow_{\epsilon\to 0} 0$ *alors* $\varphi_\epsilon \rightarrow_{\epsilon\to 0} f$ *dans* $L^\infty(\Omega)$.

EXEMPLE 1.2. Si l'on prend h_ϵ, $h_{1,\epsilon} \in W^{1-(1/p),p}(\Gamma)$ avec $h_\epsilon \leqslant h_{1,\epsilon}$ p.p. sur Γ, $\sup \operatorname{ess}_\Gamma h_\epsilon < +\infty$, $\inf \operatorname{ess}_\Gamma h_{1,\epsilon} > -\infty$,

$$\mathbb{K}_\epsilon = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid h_\epsilon \leqslant \gamma u \leqslant h_{1,\epsilon} \text{ p.p. sur } \Gamma\}$$

alors on est dans les conditions d'application du Théorème 1.2 pour

$$k(\epsilon) = \max(0, \sup_\Gamma \operatorname{ess}(h_\epsilon - \gamma f), \sup_\Gamma \operatorname{ess}(\gamma f - h_{1,\epsilon})).$$

2. DEMONSTRATION DES THÉORÈMES 1.1 ET 1.2

Dans la suite c_1 et c désigneront des constantes positives ne dépendant eventuellement que de N, p, q et Ω.

Démonstration du Théorème 1.1. Soit $k \geqslant \| \gamma w_\epsilon \|_{\infty,\Gamma}$. Puisque on a

$$w_\epsilon - \{w_\epsilon\}^k \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{K} + W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{K}$$

on peut, respectivement dans (1.1) et (1.2), mettre

$$v - u_\epsilon = \{w_\epsilon\}^k - w_\epsilon \qquad \text{et} \qquad w - v_\epsilon = w_\epsilon - \{w_\epsilon\}^k.$$

Par addition on en déduit, avec $E_{\epsilon,k} = \{x \in \Omega \mid w_\epsilon(x) > k\}$,

$$\begin{aligned}
&\epsilon \sum_{i=1}^{N} \int_{E_{\epsilon,k}} (| D_i u_\epsilon |^{p-2} D_i u_\epsilon - | D_i v_\epsilon |^{p-2} D_i v_\epsilon) D_i w_\epsilon \\
&\quad \leqslant - \int_{E_{\epsilon,k}} w_\epsilon(w_\epsilon - k) \qquad (2.1) \\
&\quad\quad - \epsilon \left[\int_{E_{\epsilon,k}} g_\epsilon(w_\epsilon - k) + \sum_{i=1}^{N} \int_{E_{\epsilon,k}} | D_i f |^{p-2} D_i f \, D_i w_\epsilon \right].
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant qu'on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} \int_{E_{\epsilon,k}} (| D_i u_\epsilon |^{p-2} D_i u_\epsilon - | D_i v_\epsilon |^{p-2} D_i v_\epsilon) D_i w_\epsilon \\
&\qquad \geqslant c_0 \sum_{i=1}^{N} \int_{E_{\epsilon,k}} | D_i w_\epsilon |^p, \qquad (\text{cf. } (1.5)) \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

$$\int_{E_{\epsilon,k}} w_\epsilon(w_\epsilon - k) \geqslant 0, \qquad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
&\int_{E_{\epsilon,k}} (w_\epsilon - k)^p \leqslant c_1 \sum_{i=1}^{N} \int_{E_{\epsilon,k}} | D_i w_\epsilon |^p \\
&\qquad (\text{car } w_\epsilon - \{w_\epsilon\}^k \in W_0^{1,p}(\Omega)), \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{E_{\epsilon,k}} | g_\epsilon | (w_\epsilon - k) &\leqslant c \| g_\epsilon \|_{p',E_{\epsilon,k}}^{p'} + \frac{c_0}{4c_1} \int_{E_{\epsilon,k}} (w_\epsilon - k)^p \\
&\leqslant c \| g_\epsilon \|_{p',E_{\epsilon,k}}^{p'} + \frac{c_0}{4} \sum_{i=1}^{N} \int_{E_{\epsilon,k}} | D_i w_\epsilon |^p, \\
&\qquad \left(p' = \frac{p}{p-1}\right), \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{E_{\epsilon,k}} | D_i f |^{p-1} | D_i w_\epsilon | \leqslant c \| \nabla f \|_{p,E_{\epsilon,k}}^p + \frac{c_0}{4} \sum_{i=1}^{N} \int_{E_{\epsilon,k}} | D_i w_\epsilon |^p. \qquad (2.6)$$

Compte tenu de (2.2), (2.3), (2.5) et (2.6) on déduit de (2.1)

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{E_{\epsilon,k}} | D_i w_\epsilon |^p \leqslant c(\| g_\epsilon \|_{p',E_{\epsilon,k}}^{p'} + \| \nabla f \|_{p,E_{\epsilon,k}}^p). \qquad (2.7)$$

De (2.7) on déduit

$$\| \nabla w_\epsilon \|_{p,E_{\epsilon,k}} \leqslant c(\| g_\epsilon \|^{1/(p-1)}_{q/(p-1),\Omega} + \| \nabla f \|_{q,\Omega}) \mid E_{\epsilon,k} \mid^{1/p-1/q} \tag{2.8}$$

où $\mid E_{\epsilon,k} \mid$ désigne la mesure de $E_{\epsilon,k}$.

Soit $m = m(N, p)$ tel que $1 < m \leqslant p$, $m < N$,

$$m^* = \frac{mN}{N-p} > p.$$

Il vient, puisque

$$w_\epsilon - \{w_\epsilon\}^k \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$\left(\int_{E_{\epsilon,k}} (w_\epsilon - k)^{m^*}\right)^{1/m^*} = \| w_\epsilon - \{w_\epsilon\}^k \|_{m^*,\Omega} \leqslant c \| \nabla(w_\epsilon - \{w_\epsilon\}^k) \|_{m,\Omega}$$
$$\leqslant c \| \nabla w_\epsilon \|_{m,E_{\epsilon,k}},$$

d'où

$$\int_{E_{\epsilon,k}} (w_\epsilon - k) \leqslant c \mid E_{\epsilon,k} \mid^{1-1/m^*} \mid E_{\epsilon,k} \mid^{1/m-1/p} \| \nabla w_\epsilon \|_{p,E_{\epsilon,k}}$$

et donc, par (2.8),

$$\int_{E_{\epsilon,k}} (w_\epsilon - k) \leqslant c(\| \nabla f \|_{q,\Omega} + \| g_\epsilon \|^{1/(p-1)}_{q/(p-1),\Omega}) \mid E_{\epsilon,k} \mid^{1+\theta},$$

où

$$\theta = \frac{1}{N} - \frac{1}{q} > 0.$$

Ceci entraîne, par le Lemme 5.1 du Chapitre II de [3],

$$\sup_\Omega \text{ess}\, w_\epsilon \leqslant \| \gamma w_\epsilon \|_{\infty,\Gamma} + c(\| \nabla f \|_{q,\Omega} + \| g_\epsilon \|^{1/(p-1)}_{q/(p-1),\Omega})^{1/(1+\theta)} \| w_\epsilon \|^{\theta/(1+\theta)}_{1,\Omega}.$$

En raisonnant avec $w_\epsilon - \{w_\epsilon\}_{-k}$, $k \geqslant \| \gamma w_\epsilon \|_{\infty,\Gamma}$, on obtient une majoration analogue pour $\sup \text{ess}_\Omega (-w_\epsilon)$ ce qui achève la démonstration du Théorème 1.1.

Remarque 2.1. A la place de $g_\epsilon \in L^{q/(p-1)}(\Omega)$ on pourrait, plus généralement, considérer g_ϵ dans le dual de $W^{1,p}(\Omega)$, défini par

$$(g_\epsilon, v) = \int_\Omega g_{\epsilon,0} v + \sum_{i=1}^N \int_\Omega g_{\epsilon,i} D_i v, \qquad \forall v \in W^{1,p}(\Omega),$$

avec

$$g_{\epsilon,k} \in L^{q/(p-1)}(\Omega), \qquad k = 0, 1,..., N.$$

Démonstration du Théorème 1.2. Commençons par démontrer (1.11): Soit $E_\epsilon = \{x \in \Omega \mid |\psi_\epsilon(x)| > k(\epsilon)\}$. En posant

$$v = f + \{\psi_\epsilon\}_{-k(\epsilon)}^{k(\epsilon)}$$

dans (1.10) on obtient

$$\begin{aligned} &\epsilon \sum_{i=1}^{N} \int_{E_\epsilon} |D_i\varphi_\epsilon|^{p-2} D_i\varphi_\epsilon(D_i f - D_i\varphi_\epsilon) \\ &\qquad - \int_{E_\epsilon} |\varphi_\epsilon - f|^2 + k(\epsilon) \int_{E_\epsilon} |\varphi_\epsilon - f| \geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

d'où, puisque

$$\int_{E_\epsilon} |\psi_\epsilon|^2 - k(\epsilon) \int_{E_\epsilon} |\psi_\epsilon| \geqslant 0,$$

on déduit

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{E_\epsilon} |D_i\varphi_\epsilon|^p \leqslant \sum_{i=1}^{N} \int_{E_\epsilon} |D_i f|^p. \tag{2.10}$$

Alors par (2.9) et (2.10) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{E_\epsilon} |\psi_\epsilon|^2 - k(\epsilon) \int_{E_\epsilon} |\psi_\epsilon| &\leqslant \epsilon \sum_{i=1}^{N} \int_{E_\epsilon} |D_i\varphi_\epsilon|^{p-2} D_i\varphi_\epsilon(D_i f - D_i\varphi_\epsilon) \\ &\leqslant \epsilon \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |D_i f|^p. \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_{E_\epsilon} |\psi_\epsilon|^2 \leqslant k(\epsilon) \, |\Omega|^{1/2} \left(\int_{E_\epsilon} |\psi_\epsilon|^2 \right)^{1/2} + \epsilon \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |D_i f|^p,$$

d'où

$$\int_{E_\epsilon} |\psi_\epsilon|^2 \leqslant c \left[(k(\epsilon) \, |\Omega|^{1/2})^2 + \epsilon \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |D_i f|^p \right]. \tag{2.11}$$

D'autre part, on a

$$\int_{\Omega - E_\epsilon} |\psi_\epsilon|^2 \leqslant k(\epsilon)^2 \, |\Omega|$$

ce qui avec (2.11) entraîne (1.11).

Passons maintenant à la démonstration de (1.12):

Pour

$$k \geqslant k(\epsilon) + \frac{2}{|\Omega|} \| \psi_\epsilon \|_{1,\Omega}$$

soit

$$A_{\epsilon,k} = \{x \in \Omega \mid \psi_\epsilon(x) > k\}.$$

En posant $v = f + \{\psi_\epsilon\}^k$ dans (1.10) on obtient

$$\epsilon \sum_{i=1}^{N} \int_{A_{\epsilon,k}} | D_i\varphi_\epsilon |^{p-2} D_i\varphi_\epsilon(D_i f - D_i\varphi_\epsilon) + \int_{A_{\epsilon,k}} (\varphi_\epsilon - f)(f + k - \varphi_\epsilon) \geqslant 0. \tag{2.12}$$

D'autre part on a (cf. (1.5))

$$\begin{aligned} c_0 \sum_{i=1}^{N} \int_{A_{\epsilon,k}} | D_i\varphi_\epsilon - D_i f |^p & \\ \leqslant \sum_{i=1}^{N} \int_{A_{\epsilon,k}} (| D_i\varphi_\epsilon |^{p-2} D_i\varphi_\epsilon - | D_i f |^{p-2} D_i f)(D_i\varphi_\epsilon - D_i f). & \end{aligned} \tag{2.13}$$

On déduit de (2.13) et (2.12)

$$c_0 \sum_{i=1}^{N} \int_{A_{\epsilon,k}} | D_i\psi_\epsilon |^p \leqslant - \sum_{i=1}^{N} \int_{A_{\epsilon,k}} | D_i f |^{p-2} D_i f \, D_i\psi_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \int_{A_{\epsilon,k}} \psi_\epsilon(k - \psi_\epsilon).$$

Ceci entraîne, puisque

$$\int_{A_{\epsilon,k}} \psi_\epsilon(k - \psi_\epsilon) \leqslant 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{A_{\epsilon,k}} | D_i\psi_\epsilon |^p \leqslant c \sum_{i=1}^{N} \int_{A_{\epsilon,k}} | D_i f |^p + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_{A_{\epsilon,k}} | D_i\psi_\epsilon |^p,$$

d'où

$$\| \nabla\psi_\epsilon \|_{p,A_{\epsilon,k}} \leqslant c \| \nabla f \|_{q,\Omega} | A_{\epsilon,k} |^{1/p-1/q}. \tag{2.14}$$

Soit $m = m(N, p)$ tel que

$$1 < m \leqslant p, \qquad m < N, \qquad m^* = \frac{mN}{N-p} > p.$$

On a

$$k \geqslant \frac{2}{|\Omega|} \int_\Omega | \psi_\epsilon | \geqslant \frac{2}{|\Omega|} k | A_{\epsilon,k} |,$$

d'où

$$|\Omega - A_{\epsilon,k}| \geqslant \tfrac{1}{2} |\Omega| .$$

De plus $\psi_\epsilon - \{\psi_\epsilon\}^k$ est nulle sur $\Omega - A_{\epsilon,k}$. Alors le Lemme 3.1(c) de [1] entraîne

$$\left(\int_{A_{\epsilon,k}} (\psi_\epsilon - k)^{m^*}\right)^{1/m^*} = \| \psi_\epsilon - \{\psi_\epsilon\}^k \|_{m^*,\Omega} \leqslant c \| \nabla(\psi_\epsilon - \{\psi_\epsilon\}^k)\|_{m,\Omega}$$
$$\leqslant c \| \nabla\psi_\epsilon \|_{m,A_{\epsilon,k}} ,$$

d'où

$$\int_{A_{\epsilon,k}} (\psi_\epsilon - k) \leqslant c \,| A_{\epsilon,k} |^{1-1/m^*} \,| A_{\epsilon,k} |^{1/m-1/p} \| \nabla\psi_\epsilon \|_{p,A_{\epsilon,k}} ,$$

et donc, par (2.14),

$$\int_{A_{\epsilon,k}} (\psi_\epsilon - k) \leqslant c \| \nabla f \|_{q,\Omega} \,| A_{\epsilon,k} |^{1+\theta}, \qquad \text{où} \qquad \theta = \frac{1}{N} - \frac{1}{q} > 0.$$

Ceci entraîne, par le Lemme 5.1 du Chapitre II de [3],

$$\sup_{\Omega} \operatorname{ess} \psi_\epsilon \leqslant k(\epsilon) + \frac{2}{|\Omega|} \| \psi_\epsilon \|_{1,\Omega} + c \| \nabla f \|_{q,\Omega}^{1/(1+\theta)} \| \psi_\epsilon \|_{1,\Omega}^{\theta/(1+\theta)}.$$

En posant dans (1.10)

$$v = f + \{\psi_\epsilon\}_{-k} , \qquad k \geqslant k(\epsilon) + \frac{2}{|\Omega|} \| \psi_\epsilon \|_{1,\Omega} ,$$

on obtient une majoration semblable pour $\sup \operatorname{ess}_\Omega (-\psi_\epsilon)$ ce qui achève la démonstration du Théorème 1.2.

Remarque 2.2. Dans le cas particulier où

$$\mathbb{K}_\epsilon = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid \gamma u = h_\epsilon\}, \qquad h_\epsilon \in W^{1-(1/p),p}(\Gamma) \cap L^\infty(\Gamma)$$

(problème de Dirichlet) on peut, dans la démonstration de (1.12), supposer

$$k \geqslant k(\epsilon) = \| h_\epsilon - \gamma f \|_{\infty,\Gamma}$$

par application du théorème de Sobolev à $\psi_\epsilon - \{\psi_\epsilon\}^k \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Donc, sous cette hypothèse on peut considérer $c_1 = 0$ dans (1.12).

Bibliographie

1. H. Beirão da Veiga, Sur la régularité des solutions de l'équation div $A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u)$ avec des conditions aux limites unilatérales et mêlées, à paraître.
2. J. P. Dias, Une classe de problèmes variationnelles non linéaires de type elliptique ou parabolique, à paraître dans une revue italienne.
3. O. A. Ladyženskaja et N. N. Ural'ceva, "Équations aux dérivées partielles de type elliptique," Dunod, Paris, 1968.
4. J. L. Lions, "Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires," Dunod, Paris, 1969.
5. J. L. Lions, Singular perturbations and singular layers in variational inequalities, Symposium on Non Linear Functional Analysis, Madison, Avril 1971, à paraître.
6. L. Tartar, Interpolation non linéaire et régularité, *J. Functional Analysis*, à paraître.